ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES MATHEMATIQUES III
OPTION ECONOMIQUE

EXERCICE 1

1) Pour tout entier naturel n on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2} dt - \int_x^1 e^{-nt^2} dt.$$

a) Montrer que f_n est dérivable sur $[0,1]$.
b) Etudier le sens de variation de f_n.

2) Montrer qu'il existe un unique réel c_n de $[0,1]$ tel que $\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt$.
Donner la valeur de c_0.

3) On considère la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ des nombres définis à la question précédente ; montrer qu'elle est décroissante et qu'elle converge vers une limite l appartenant à $[0,1]$.

4) a) Montrer que pour tout nombre réel fixé r de $]0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^r e^{nt^2} dt = +\infty$.
b) Montrer que pour tout entier naturel n on a $\int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leq 1$.
c) En déduire la valeur de l .

EXERCICE 2

1) a) Rappeler la valeur de la quantité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ et en déduire la valeur de $\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

b) Déterminer la constante k telle que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x^2}{2}} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$ soit une densité de probabilité.

2) Un barrage alimente l'irrigation d'une région donnée. La quantité d'eau de pluie tombée en un mois en amont du barrage est une variable aléatoire X qui suit une loi de densité f. On suppose que, dans un système d'unités convenablement choisi, la quantité d'eau fournie par le barrage est égale à la variable aléatoire $Q = (1 - ae^{-bX^2})$ où b est un nombre strictement positif et a un nombre tel que $0 < a < 1$.

a) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $Var(X)$ de la variable aléatoire X .

b) Etudier la fonction g définie sur R_+ par $g(x) = (1 - ae^{-bx^2})$. Montrer qu'elle admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera le domaine de définition. Expliciter la valeur de $g^{-1}(y)$ en fonction de y .

c) Calculer l'espérance $E(Q)$ et la variance $Var(Q)$ de la variable Q en fonction de a et b .

3) Exprimer la probabilité p que Q soit supérieure à une valeur fixée α à l'aide de la fonction de répartition Φ d'une loi normale centrée réduite, de la fonction g^{-1} et de α

EXERCICE 3

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et on désigne par Γ la partie de $M_3(\mathbf{R})$ constituée des matrices dont les trois colonnes sont égales.

1. Soit

$$T = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$$

un élément de Γ. On pose $s = a + b + c$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice T dans la base (e_1, e_2, e_3) .

a) On suppose, dans cette question, que $s \neq 0$.

i) Montrer que les vecteurs

$$f_1 = e_1 - e_2, \qquad f_2 = e_2 - e_3, \qquad f_3 = ae_1 + be_2 + ce_3$$

forment une base de $\mathbf{R}^3$.

ii) Déterminer la matrice de u dans cette base.

iii) En déduire les valeurs propres de T.

b) On suppose, dans cette question, que $s = 0$.

i) Calculer T^2.

ii) En déduire que T admet 0 pour unique valeur propre.

2. Soit de plus

$$T' = \begin{pmatrix} a' & a' & a' \\ b' & b' & b' \\ c' & c' & c' \end{pmatrix}$$

un autre élément de Γ et $s' = a' + b' + c'$.

a) Exprimer le produit TT' en fonction de T.

b) A quelles conditions les matrices TT' et T ont-elles les mêmes valeurs propres ? (On pourra distinguer les cas $s = 0$ et $s \neq 0$).

3. Soit M un élément de $M_3(\mathbf{R})$ de la forme $M = T + I$, où T appartient à Γ et I est la matrice unité de $M_3(\mathbf{R})$. On suppose que T n'est pas la matrice nulle.

a) Pour tout couple (α, β) de nombres réels, exprimer le produit $M(\alpha I + \beta M)$ comme combinaison linéaire de I et de M.

b) Trouver les valeurs de s pour lesquelles M possède une inverse de la forme $(\alpha I + \beta M)$ et calculer cette inverse.

Pour les autres valeurs de s, la matrice M est-elle inversible ?

c) Montrer que la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

d) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de N.